

Рассчитать амплитуду светового поля при дифракции пучка с гауссовым распределением амплитуды светового поля и плоским фазовым фронтом при $z=0$:

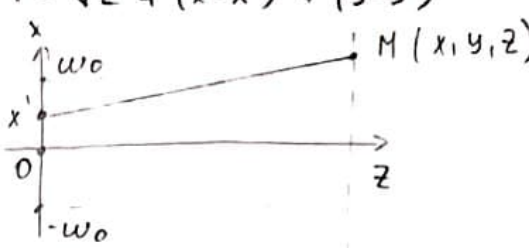
$$A(x, y, z=0, t) = A_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{2a_0^2}} e^{i(\omega t - kz)}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- Рассмотреть ближнюю зону ($z \leq k\omega_0^2$) и дифракцию Фраунгоффера ($z \gg k\omega_0^2$)
- Построить распределение интенсивности $I(r)$ ($r^2 = x^2 + y^2$ в сечении пучка) при $z=0$ и $z = k\omega_0^2$
- Построить график зависимости радиуса гауссова пучка ω от расст. z , если $\omega(0) = \omega_0$

Решение:

$$S = \iint \frac{a(x', y')}{r} \cos(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}) dx' dy', \quad r = \sqrt{z^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2}$$

В нашем случае $a(x', y') = A_0 e^{-\frac{x'^2+y'^2}{2\omega_0^2}}$



① Рассмотрим дифракцию Фраунгоффера

$\frac{1}{r} \approx \text{const} = \frac{1}{z} \Rightarrow r \approx z$ Можем представить r в аргументе $\cos$ в следующем виде: $r = r_0 - \frac{xx' + yy'}{z}$, где $r_0 = \rho(0, M)$.

$$\Rightarrow S = \frac{A_0}{z} \iint e^{-\frac{(x'^2+y'^2)}{2\omega_0^2}} \text{Re} \left(e^{i(\omega t - kr_0 + \frac{k(xx' + yy')}{z})} \right) dx' dy' =$$

$$= \frac{A_0}{z} \text{Re} \iint e^{\left(-\frac{(x'^2+y'^2)}{2\omega_0^2} + i\omega t - kr_0 i + \frac{ki(xx' + yy')}{z} \right)} dx' dy' =$$

$$= \frac{A_0}{z} \cos(\omega t - kr_0) \text{Re} \iint e^{\left(-\frac{x'^2+y'^2}{2\omega_0^2} + i\frac{k(xx' + yy')}{z} \right)} dx' dy' = \left\{ \begin{array}{l} \text{обобщенный} \\ \text{Гауссов интеграл} \end{array} \right\} =$$

$$= 2\pi \frac{A_0 \omega_0^2}{z} e^{\left(-\frac{(k\omega_0^2)^2}{2z^2} (x^2 + y^2) \right)} \cdot \cos(\omega t - kr_0)$$

Фаза постоянна, при $r_0 = \text{const}$ - сферическая волна

Распределение амплитуды вдоль пп-ти при $z = \text{const}$:

$$f(x, y) = e^{\left(-\frac{(x^2+y^2)}{2z^2} (k\omega_0^2)^2 \right)} \quad \text{Радиус гауссова пучка} \quad \underline{\omega} = \frac{z}{k\omega_0^2}$$

$\Rightarrow$ при $z \gg k\omega_0^2 \Rightarrow \underline{\omega} \sim z$.

2) Интеграл по поверхности z :

$$S = \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(x'y')}{r} \cos\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}\right) dx' dy'$$

$$r = \sqrt{z^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2} \quad \frac{1}{r} \approx \frac{1}{z} \Rightarrow \text{Важно } r \approx z + \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2z}$$

$$S = \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_0}{z} e\left(-\frac{x'^2 + y'^2}{2\omega_0^2}\right) \operatorname{Re}\left(e\left(i\left(\omega t - kz - \frac{k((x-x')^2 + (y-y')^2)}{2z}\right)\right)\right) dx' dy' =$$

$$= \frac{a_0}{z} \operatorname{Re} \iint_{-\infty}^{+\infty} e\left(-\frac{x'^2 + y'^2}{2\omega_0^2} + i\omega t - kz - \frac{k((x-x')^2 + (y-y')^2)}{2z}\right) dx' dy' =$$

$$= \frac{a_0}{z} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} e\left(-\frac{x'^2}{2\omega_0^2} - \frac{k((x-x')^2)}{2z}\right) dx' \int_{-\infty}^{+\infty} e\left(-\frac{y'^2}{2\omega_0^2} - \frac{k((y-y')^2)}{2z}\right) dy' \cdot e(i\omega t - kz) =$$

$$= \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e\left(-\frac{\xi^2}{2\omega_1^2} - \frac{(z-z')^2}{2\omega_2^2}\right) d\xi' = \sqrt{2\pi} \frac{\omega_1 \omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} e\left(-\frac{\xi^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2}\right) \right\} = \left\{ \text{В нашем случае } \omega_1^2 = \omega_0^2, \omega_2^2 = \frac{z}{k} \right\}$$

$$= \frac{2\pi}{k} a_0 \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^4 + \left(\frac{z}{k}\right)^2}} e\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\left(\omega_0^2 + \left(\frac{z}{k}\right)^2\right)}\right) \cos\left(\omega t - k\left(z + \frac{x^2 + y^2}{2R} + \frac{z}{k\omega_0^2}\right)\right) \quad (*)$$

$$R = z + \frac{(k\omega_0^2)^2}{z}$$

$$\text{при } z \geq k\omega_0^2: S \approx \frac{2\pi a_0 \omega_0^4}{z} e\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\left(\frac{z}{k\omega_0^2}\right)^2}\right) \cos(\omega t - kr_0).$$

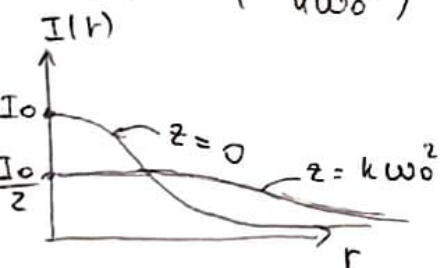
3) Распределение интенсивности (z поставим в $(*)$):

$$z=0: S(x,y) = \frac{2\pi}{k} a_0 e\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\omega_0^2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I(r) \sim |S|^2 \sim e\left(-\frac{r^2}{2\omega_0^2}\right) \sim e\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2}\right)$$

$$z = k\omega_0^2: S(x,y) = \frac{2\pi}{k} a_0 \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^4 + \omega_0^4}} e\left(-\frac{x^2 + y^2}{4\omega_0^2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I \sim |S|^2 \sim e\left(-\frac{x^2 + y^2}{4\omega_0^2}\right)$$



4) Радиус Гауссова пучка: $\underline{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{z}{k\omega_0}\right)^2}$

